

Методико-учебный комплекс

Раздел: «Дифференциальные уравнения» (11 класс)

I. Общие цели модуля

1. Сформировать у учащихся умение составлять и решать дифференциальные уравнения (ДУ) 1-го и 2-го порядков.
2. Научить интерпретировать процессы гармонических колебаний, радиоактивного распада, остывания и роста популяций с помощью математических моделей.
3. Подготовить учащихся к усвоению курса высшей математики в вузах с использованием задач из сборника А. Ф. Филиппова.

II. Содержание тем и разбор примеров

1.1 Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

1. Цель темы

Освоить понятия «*порядок ДУ*», «*общее и частное решение*», «*задача Коши*»; научиться разделять переменные в уравнениях вида $y' = f(x)g(y)$ и находить их интегралы.

2. Теоретическое обоснование

Заменив производную y' на отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, преобразуем уравнение к виду, позволяющему интегрировать обе части независимо:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

3. Разбор примеров

Пример 1.1 (Школьный уровень — Абылкасымова / Шыныбеков). Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 4x^3y$.

Решение:

1. Запишем производную через дифференциалы:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y$$

2. Разделим переменные при $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{y} = 4x^3 dx$$

3. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 4x^3 dx \implies \ln |y| = x^4 + C_1$$

4. Потенцируя обе части, находим общее решение (включая тривиальное $y = 0$):

$$y(x) = Ce^{x^4}$$

Ответ: $y = Ce^{x^4}$.

Пример 1.2 (Углублённый уровень — Задача Коши из А. Ф. Филиппова). Найти частное решение уравнения $y' \operatorname{tg} x = y$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решение:

1. Представим y' как $\frac{dy}{dx}$ и преобразуем тригонометрическую функцию:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = y$$

2. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

3. Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \implies \ln |y| = \ln |\sin x| + \ln |C| \implies y = C \sin x$$

4. Используем начальное условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$1 = C \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies C = 1$$

5. Запишем частное решение:

$$y(x) = \sin x$$

Ответ: $y = \sin x$.

4. Организация учебной работы

- **Работа в классе:** Отработка простейших ДУ и задач Коши (*Абылкасымова / Шыныбеков; Филиппов: № 1, 6, 12, 17*).
- **Самостоятельная работа:** Решение задач Коши с тригонометрическими функциями (*Филиппов: № 2, 8, 15, 20*).

1.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Цель темы

Научиться составлять характеристическое уравнение для ЛОДУ 2-го порядка вида $y'' + py' + qy = 0$, находить его корни и выписывать общее решение для всех случаев дискриминанта ($\mathcal{D} > 0$, $\mathcal{D} = 0$, $\mathcal{D} < 0$).

2. Теоретическое обоснование

Подстановкой $y = e^{kx}$ в уравнение $y'' + py' + qy = 0$ получаем **характеристическое уравнение**:

$$k^2 + pk + q = 0$$

В зависимости от знака дискриминанта $\mathcal{D} = p^2 - 4q$ структура общего решения имеет вид:

1. $\mathcal{D} > 0$ (действительные различные корни $k_1 \neq k_2$):

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2. $\mathcal{D} = 0$ (кратный корень $k_1 = k_2 = k$):

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$$

3. $\mathcal{D} < 0$ (комплексно-сопряжённые корни $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$):

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

3. Разбор примеров

Пример 1.3 (Действительные различные корни — Шыныбеков). Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

2. Определим корни уравнения:

$$\mathcal{D} = 25 - 24 = 1 > 0 \implies k_1 = 3, \quad k_2 = 2$$

3. Запишем общее решение для случая действительных различных корней:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.

Пример 1.4 (Комплексные корни / Модель гармонических колебаний — А. Ф. Филиппов). Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 0$.

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4 = 0$$

2. Найдём комплексные корни:

$$k^2 = -4 \implies k_{1,2} = \pm 2i$$

3. Выделим действительную и мнимую части ($\alpha = 0, \beta = 2$):

$$y(x) = e^{0 \cdot x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

4. Организация учебной работы

- **Работа в классе:** Составление характеристических уравнений и нахождение корней (*Шыныбеков; Филиппов: № 515, 518*).
- **Самостоятельная работа:** Задачи Коши для ДУ 2-го порядка и моделирование колебаний (*Филиппов: № 516, 520, 523*).

III. Использование учебной литературы

1. **Первичное изучение теории:** Учебник «Алгебра и начала анализа, 11 класс» (А. Е. Абылкасымова и др.).
2. **Задачи математического моделирования:** Учебник «Алгебра и начала анализа, 11 класс» (А. Н. Шыныбеков, Д. А. Шыныбеков).
3. **Практикум и отработка техники решений:** Задачник А. Ф. Филиппов «Сборник задач по дифференциальным уравнениям».

IV. Список литературы

1. Абылкасымова, А. Е., Кучер, Т. П., Корчевский, В. Е., Жумагулова, З. А. Алгебра и начала анализа: Учебник для 11 классов естественно-математического направления общеобразовательных школ. — Алматы: Мектеп.
2. Шыныбеков, А. Н., Шыныбеков, Д. А., Жумабаев, Р. М. Алгебра и начала анализа: Учебник для 11 классов естественно-математического направления общеобразовательных школ. — Алматы: Атамұра.
3. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика».